சிக்கலெண்கள் (*Complex Numbers*)

சிக்கலெண்

a, b என்பன மெய் எண்களாக $a + ib$ என்பது சிக்கலெண் என வரையறுக்கப்படும். $i = \sqrt{-1}$ ஆகும். சிக்கலெண்கள் பொதுவாக Z இனால் குறிக்கப்படும்.

குறிப்பு : இங்கு a என்பது சிக்கலெண்ணின் மெய்ப்பகுதி எனவும் b என்பது சிக்கலெண்ணின் கற்பனைப்பகுதி எனவும் அழைக்கப்படும்.

$a = Re\,(Z)$ எனவும் $b = Im\,(Z)$ எனவும் குறிக்கப்படும்

$\boldsymbol{i^2 = -1}$,

$\boldsymbol{i^3 = i^2 . i = -i}$,

$\boldsymbol{i^4 = i^2 i^2 = (-1).(-1) = 1}$

$\boldsymbol{i^5 = i^4 . i = i}$

$\boldsymbol{i^6 = i^5 . i = i . i = i^2 = -1}$

$\boldsymbol{i^7 = i^6 . i = -1i}$

$\boldsymbol{i^8 = i^4 . i^4 = 1}$

$\boldsymbol{i^{4n} = 1}$

$\boldsymbol{i^{4n+1} = i}$

சிக்கலெண் ஒன்றின் உடன்புணரி (Conjugate Complex Number)

$Z = a + ib$ என்ற சிக்கலெண்ணின் உடன் புணரிச் சிக்கலெண், $\bar{Z} = a - ib$ என வரையறுக்கப்படும்.

சிக்கலெண்களின் கூட்டல்

$Z_1 = a + ib$

$Z_2 = c + id$

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (a + ib) + (c + id) \\ &= (a + c) + i(b + d) \end{aligned}$$

சிக்கலெண்களின் கழித்தல்

$$\begin{aligned} Z_1 - Z_2 &= (a + ib) - (c + id) \\ &= (a - c) + i(b - d) \end{aligned}$$

சிக்கலெண்களின் பெருக்கல்

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= (a + ib)(c + id) \\ &= a(c + id) + ib(c + id) \\ &= ac + iad + ibc + i^2 bd \\ &= ac + i^2 bd + iad + ibc \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc) \end{aligned}$$

சிக்கலெண்களின் வகுத்தல்

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+ib}{c+id}$$

$$= \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{a(c-id)+ib(c-id)}{(c+id)(c-id)}$$

$$= \frac{a(c-id)+ib(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac-i^2bd+ibc-iad}{c^2-i^2d^2}$$

$$= \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

சிக்கலெண்ணின் பண்புகள்

1. $x + iy = 0$ எனின் $x = 0\ and\ y = 0$ ஆகும்

   நிறுவல்: $x + iy = 0$

   $\Rightarrow\ x = -iy$

   இடப்பக்கத்தில் மெய்யெண்ணும் வலப்பக்கத்தில் கற்பனையெண்ணும் உள்ளன. இவை சமனாக இருக்க முடியாது. ஆகவே இவை தனித்தனி பூச்சியமாக இருப்பின் மட்டுமே சாத்தியமாகும்.

   $\therefore\ x = 0\ and\ y = 0$ ஆகும்

$$\boxed{x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0\ and\ y = 0}$$

2. $x + iy = a + ib$ எனின் $x = a, y = b$ ஆகும்

   நிறுவல்: $x + iy = a + ib$

   $\Rightarrow x + iy - (a + ib) = 0$

   $\Rightarrow (x - a) + i(y - b) = 0$

   $\Rightarrow (x - a) = 0\ and\ (y - b) = 0$

   $\Rightarrow (x = a)\ and\ (y = b)$

உதாரணம்:

1. $\boldsymbol{x + iy = 5 + 9i}$ ஐத் தீர்க்க

$\boldsymbol{x - 5 + i(y - 9) = 0}$

$\boldsymbol{x - 5 = 0 \ and \ (y - 9) = 0}$

$\boldsymbol{x = 5, y = 9}$

2. $\boldsymbol{3x - 5yi = (2 - i)^2}$ ஐத் தீர்க்க

$\boldsymbol{3x - 5yi = 4 + i^2 - 4i}$

$\Rightarrow \boldsymbol{3x - 5yi = 5 - 4i}$

$\Rightarrow \boldsymbol{(3x - 5) + i(4 - 5y) = 0}$

$\Rightarrow \boldsymbol{3x - 5 = 0 \, , 4 - 5y = 0}$

$\Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{5}{3} = 0 \, , y = \frac{4}{5}}$

3. $(1 + i)(2 + 3i)$ என்பதை $x + iy$ என்ற வடிவில் தருக

$(1 + i)(2 + 3i)$

$= 1(2 + 3i) + i(2 + 3i)$

$= (2 + 3i) + 2i + 3i^2$

$= (2 + 3i^2) + 3i + 2i$

$= (2 - 3) + 5i$

$= (-1) + 5i$

4. $(1 + i)^2$ என்பதை $x + iy$ என்ற வடிவில் தருக

$(1 + i)^2$

$= 1 + i^2 + 2i$

$= 1 - 1 + 2i$

$= 2i$

$= 0 + 2i$

5. $(1 + i)^{10}$ என்பதை $x + iy$ என்ற வடிவில் தருக

$= (1 + i)^{10}$

$= [(1 + i)^2]^5$

$= (2i)^5$

$= 2^5 . i^5$

$= 32. i^4 i$

$= 32. (1). i$

$= 32i$

6. $\frac{1+i}{1-i}$ என்பதை $x + iy$ என்ற வடிவில் தருக

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$

$= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)\,(1+i)}$

$= \frac{2i}{1-i^2}$

$= \frac{2i}{2} \; = i$

பின் வருவனவற்றை $x + iy$ என்ற வடிவில் தருக

1. $(2+5i\,)(5-8i)$
2. $(1-4i)^2$
3. $\frac{2+i}{1+i}$
4. $\frac{(1-i)(2+i)}{5-3i}$

தேற்றங்கள்

$\overline{Z_1+Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$

$\overline{Z_1-Z_2} = \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2$

$\overline{Z_1 Z_2} = \bar{Z}_1 \bar{Z}_2$

$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$

$\overline{Z_1 \bar{Z}_2} = \bar{Z}_1 Z_2$

- ❖ Z_1, Z_2 இரு சிக்கலெண்களாக $Z_1\bar{Z}_2,\ \bar{Z}_1 Z_2$ என்பன உடன் புணரிகளாகும். $Z_1 = a+ib, Z_2 = c+id$ என எடுத்து மேலுள்ள தேற்றங்கள் நிறுவ முடியும்.

<u>சிக்கலெண்ணின் முனைவு வடிவம்.</u>

$Z = x + iy$ என்க.

$=\sqrt{x^2+y^2}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ i + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$

$\sqrt{x^2+y^2} = r > 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = Cos\theta, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = Sin\theta$ எனின்

$Z = r[Cos\theta + iSin\theta]$ என்பது Z இன் முனைவு வடிவம் ஆகும்.

$x = r\ Cos\theta, y = r\ Sin\theta$

- ❖ r என்பது சிக்கலெண் Zஇன் மட்டு (Modulus) எனப்படும். $|Z| = r$
- ❖ θ என்பது சிக்கலெண் Z இன் வீச்சம் எனப்படும். $arg(Z) = \theta$
- ❖ $-\pi < \theta \le \pi$ எனின் θ தலைமை வீச்சம் எனப்படும். இது Arg(Z) = θ எனக்குறிக்கப்படும்
- ❖ $Z = r(Cos\theta + iSin\theta)$ எனின்

$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r(Cos\theta + iSin\theta)}$

$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r}(Cos\theta - isin\theta)$

$= \frac{1}{r}[Cos(-\theta) + iSin(-\theta)]$

$\therefore\ \left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|Z|}$

$arg\left(\frac{1}{Z}\right) = (-\theta) = -arg(Z)$

$\bar{Z} = r(Cos\theta - i\ Sin\theta)$

$r = \left(Cos(-\theta) + i\ Sin(-\theta)\right)$

$\therefore\ |\bar{Z}| = |Z| = r$

$arg(\bar{Z}) = (-\theta) = -arg(z)$

$|Z_1Z_2| = |Z_1Z_2|$

$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

$arg(Z_1Z_2) = arg(Z_1) + arg(Z_2)$

$arg\left({Z_1}/{Z_2}\right) = arg(Z_1) - arg(Z_2)$

- $Z = x + iy$ இன்

  $x = Re(Z) = Z$ இன் மெய்ப்பகுதி

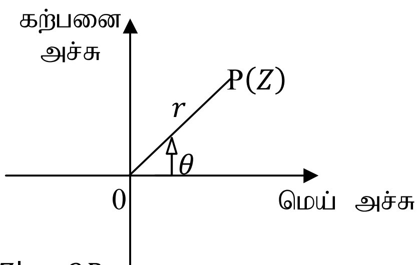
  $y = Im(Z) = Z$ இன் கற்பனைப்பகுதி

சிக்கலெண்களின் சமனிலி

$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$

$|Z_1 - Z_2| \geq |Z_1| - |Z_2|$

Argand Diagram (ஆகண் வரிப்படம்)



$|Z| = OP = r$

$arg(Z) = \theta$

குறிப்பு : P என்ற புள்ளியால் Z என்ற சிக்கலெண் குறிக்கப்படும்

உதாரணம்

1. $\sqrt{3} + i$ ஐ முனைவு வடிவில் தந்து மட்டு வீசலைக் காண்க

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$\sqrt{3} + i$ இன் மட்டு 2 ஆகும்

$\sqrt{3} + i$ இன் வீசல் $\frac{\pi}{6}$ ஆகும்

2. $-\sqrt{3} - i$ ஐ முனைவு வடிவில் தந்து மட்டு வீசலைக் காண்க

$$-\sqrt{3} - i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$-\sqrt{3} - i$ இன் மட்டு 2 ஆகும்

$-\sqrt{3} - i$ இன் வீசல் $\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ ஆகும்

3. -1 ஐ முனைவு வடிவில் தந்து மட்டு வீசலைக் காண்க

$$-1 = (-1 + 0i)$$

$$= 1(-1 + 0i)$$

$$= 1(\cos\pi + i\sin\pi)$$

-1 இன் மட்டு 1 ஆகும்

-1 இன் வீசல் (π) ஆகும

4. i ஐ முனைவு வடிவில் தந்து மட்டு வீசலைக் காண்க

$$i = 0 + 1i$$

$$= 1(0 + 1i)$$

$$= 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

i இன் மட்டு 1 ஆகும்

i இன் வீசல் $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ஆகும்

5. $\frac{1}{i}$ ஐ முனைவு வடிவில் தந்து மட்டு வீசலைக் காண்க

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2}$$

$$= \frac{i}{-1}$$

$$= -i$$

$$= 0 - i$$

$$= 0 + (-1)i$$

$$= [0 + (-1)i]$$

$$= 1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$\frac{1}{i}$ இன் மட்டு 1 ஆகும்

$\frac{1}{i}$ இன் வீசல் $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ஆகும்

பின்வரும் சிக்கலெண்களின் மட்டு, வீச்சத்தினை தருக

1. $1+i$ 2. $1+\sqrt{3i}$ 3. $-1-i$ 4. $-1-\sqrt{3i}$

2. பின்வருவனவற்றில் $a+ib$ வடிவில் தருக

1. $\frac{1+i}{2-i}$ 2. $\frac{3-4i}{5+2i}$ 3. $\left[\frac{(1-i)}{(1+i)}\right]^2$ 4. $\frac{(2+i)^3}{(3-i)^2}$

$-3+4i$ இன் வர்க்க மூலங்களைக் காண்க

$-3+4i$ இன் வர்க்க மூலம் $(x+iy)$ என் கொள்க

$\sqrt{-3+4i} = x+iy$

$\Rightarrow \left(\sqrt{-3+4i}\right)^2 = (x+iy)^2$
$\Rightarrow -3+4i = x^2+i^2y^2+2ixy$
$\Rightarrow -3+4i = x^2-1y^2+2ixy$
$\Rightarrow x^2-1y^2 = -3 \; and \; 2xy = 4$
$\Rightarrow x^2-y^2 = -3 \; and \; xy = 2$
$\Rightarrow x^2-\left(\frac{2}{x}\right)^2 = -3$
$\Rightarrow x^4-4 = -3x^2$
$\Rightarrow x^4+3x^2-4 = 0$
$\Rightarrow (x^2+4)(x^2-1) = 0$
$\Rightarrow x^2+4 \neq 0 \;\therefore\; x^2-1 = 0$
$\Rightarrow x = \pm 1$
$\therefore y = \pm 2$

$\therefore \sqrt{-3+4i} = 1+2i \quad or \quad -1-2i$

1 இன் கனமூலங்களைக் காணல்

$1^{1/3} = x$ எனக் கொள்க

$x^3 = 1$
$x^3-1 = 0$
$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$x = 1$ or $x^2+x+1 = 0$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$x = \frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}i}{2}$$

இதன்ஒரு மூலம் ω எனில் இதன் மற்றய மூலமாக $\overline{\omega}$ அமையும்

$\omega = -\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}i}{2}$, $\qquad\qquad \overline{\omega} = -\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}i}{2}$

$\omega = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$ $\qquad\qquad \overline{\omega} = 1[\cos(-2\pi/3) + i\sin(-2\pi/3)]$

$= 1[\cos 2\pi/3 + i\sin 2\pi/3]$

$$\omega^2 = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$= -\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}i}{2}$$
$$= \overline{\omega}$$

$\therefore\ x^3 - 1 = 0$ மூலங்களாக $1, \omega, \omega^2$ என்பன அமையும்.

அத்துடன் $\qquad \omega^3 = 1 \qquad\qquad \omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad \Rightarrow 1 + \omega + \omega^2 = 0$

1. -1 இன் கனமூலங்களைக் காண்க
2. $5 + 12i$ இன் வர்க்க மூலங்களைக் காண்க
3. $2i$ இன் வர்க்க மூலங்களைக் காண்க

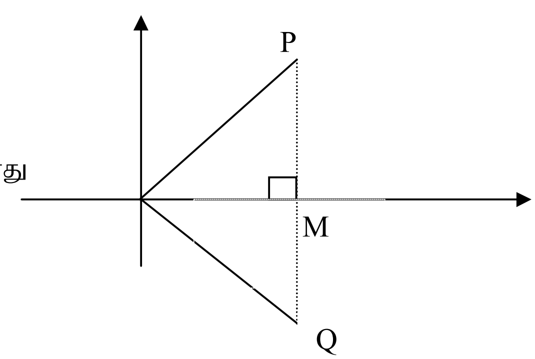
அமைப்பு 1

Z தரப்படின் (-Z) ஐ அமைத்தல்

Z = $x + iy$ என்க

-Z=$-x - iy$

Z ஐ P வகைக்குறிக்கின்றது



PM = MQ ஆகுமாறு PM ஆனது Q வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது

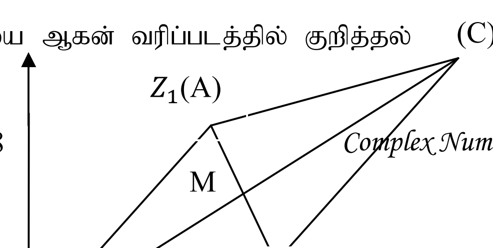
P≡ (x,y)

Q≡ (-x,-y)

Q ஆனது –Z ஐ வகைக்குறிக்கின்றது

அமைப்பு 2

$\mathbf{Z_1}, \mathbf{Z_2}$ தரப்படின் $\mathbf{Z_1 + Z_2}$ ஐ குறிக்கும் புள்ளியை ஆகன் வரிப்படத்தில் குறித்தல்



$Z_1 = a + ib$
$Z_2 = c + id$
$Z_1 + Z_2 = (a + ib) + (c + id)$
$\quad\quad = (a + c) + i(b + d)$

நிறுவல்:

A≡ (a,b)

B≡ (c,d)

A,B என்பன முறையே $\mathbf{Z_1}, \mathbf{Z_2}$ ஐ குறிக்கும்

OA , OB என்பவற்றை அயல் ஓரங்களாகக் கொண்ட இணைகரம் OACB ஐ வரைக

$\therefore M \equiv \left[\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right]$

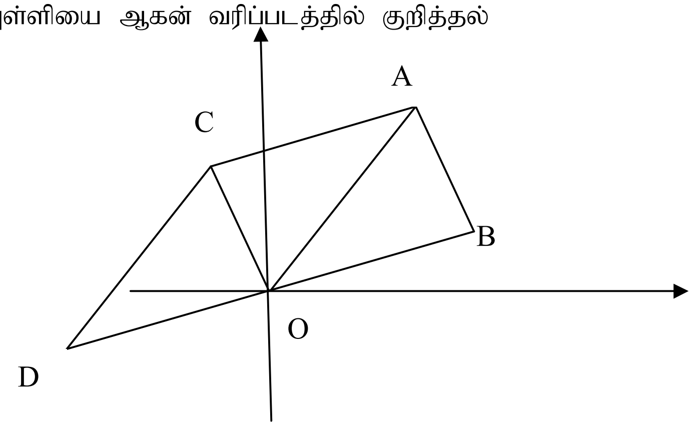
$\therefore C \equiv [a + c , b + d]$

C ஆனது $Z_1 + Z_2$ ஐக் குறிக்கும்

அமைப்பு 3

$\mathbf{Z_1}, \mathbf{Z_2}$ தரப்படின் $\mathbf{Z_1 - Z_2}$ ஐ குறிக்கும் புள்ளியை ஆகன் வரிப்படத்தில் குறித்தல்

$Z_1 = a + ib$
$Z_2 = c + id$



A≡ (a,b)

B≡ (c,d) என்க

A,B என்பன முறையே $\mathbf{Z_1}, \mathbf{Z_2}$ ஐ குறிக்கும்

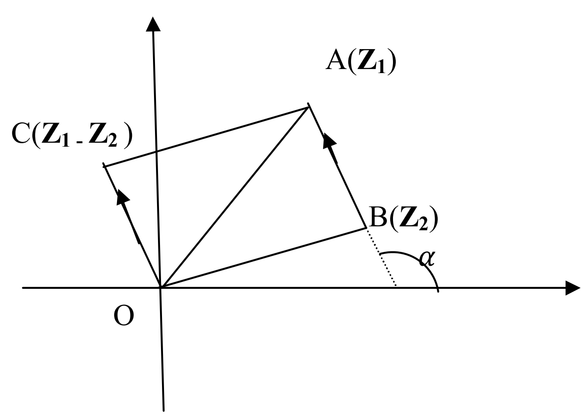
BO = OD ஆகுமாறு BO வை D வரை நீட்டுக

$\therefore$ D = (-c,-d) ஆகும்

எனவே D ஆனது $-\mathbf{Z_2}$ ஐக்குறிக்கும்

AODC என்ற இணைகரத்தை வரைக

ஆகவே புள்ளி C ஆனது $\mathbf{Z_1 - Z_2}$ ஐக்குறிக்கும்



குறிப்பு:

$|Z_1 - Z_2|$ = OC = AB என்பதை அவதானிக்க

Arg $(\mathbf{Z_1} - \mathbf{Z_2}) = \boldsymbol{\alpha}$ என்பதையும் அவதானிக்க

அமைப்பு 4

$\mathbf{Z_1}, \mathbf{Z_2}$ தரப்படின் $\mathbf{Z_1 . Z_2}$ ஐ குறிக்கும் புள்ளியை ஆகன் வரிப்படத்தில் குறித்தல்

$Z_1 = r_1(Cos\theta + iSin\theta)$

$Z_2 = r_2(Cos\alpha + iSin\alpha)$

$\mathbf{Z_1 . Z_2} = r_1(Cos\theta + iSin\theta)\, r_2(Cos\alpha + iSin\alpha)$

$= r_1 r_2[\cos\theta\cos\alpha + i^2 \sin\theta\sin\alpha + i(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)]$

$= r_1 r_2[\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha + i(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)]$

$= r_1 r_2[\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)]$

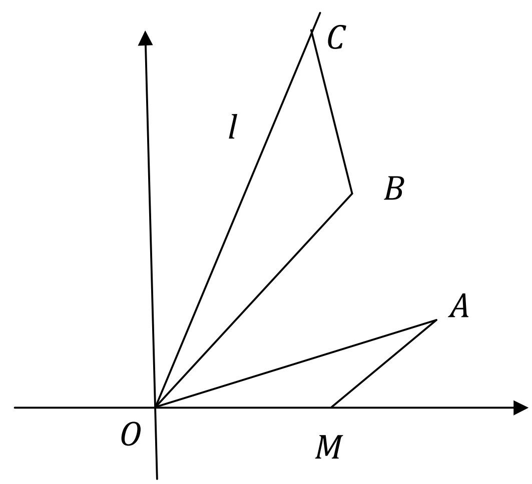
$\text{Arg}(Z_1 . Z_2) = \theta + \alpha$

$|Z_1 Z_2| = r_1 r_2$

குறிப்பு : 1. $\text{Arg}(Z_1 . Z_2) = \theta + \alpha$

$= \text{Arg}(Z_1) + \text{Arg}(Z_2)$

2. $|Z_1 Z_2| = |Z_1|\ |Z_2|$



A,B என்பன முறையே $\mathbf{Z_1}, \mathbf{Z_2}$ ஐ குறிக்கும்

$Arg(Z_1) = \theta$

$Arg(Z_2) = \alpha$

$|Z_1| = OA = r_1$

$|Z_2| = OB = r_2$

OM = 1 அலகு ஆகுமாறு மெய்யச்சில் M என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

OB உடன் இடஞ்சுழியாக θ கோணத்தில் l என்ற கோட்டை வரைக

$\measuredangle OMA = \measuredangle OBC$ ஆகுமாறு l என்ற கோட்டில் C என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

$\measuredangle MOA = \theta$

$\measuredangle MOB = \alpha$

$\Delta OMA, \Delta OBC$ இயல்பொத்தவை

$\therefore \frac{OM}{OB} = \frac{OA}{OC} \Longrightarrow \frac{1}{r_2} = \frac{r_1}{OC}$

$\Longrightarrow OC = r_1 r_2$

ஶ்ரீ $|Z_1 Z_2|$

அத்துடன் $\measuredangle MOC = \theta + \alpha$

$= \text{Arg}(Z_1 . Z_2)$

ஆகவே புள்ளி C ஆனது $Z_1 . Z_2$ என்ற சிக்கலெண்ணைக்குறிக்கும்

அமைப்பு 5

$\mathbf{Z_1}, \mathbf{Z_2}$ தரப்படின் $\frac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_2}}$ ஐ குறிக்கும் புள்ளியை ஆகன் வரிப்படத்தில் குறித்தல்

$Z_1 = r_1(Cos\theta + iSin\theta)$

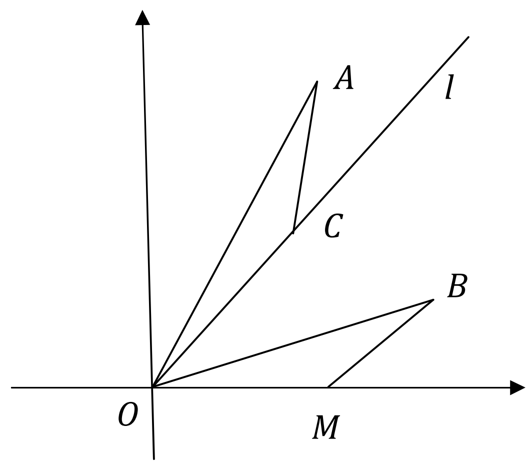
$Z_2 = r_2(Cos\alpha + iSin\alpha)$

$\frac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_2}} = \frac{r_1(Cos\theta+iSin\ \ )}{r_2(Cos\alpha+iSin\alpha)}$

$= \frac{r_1}{r_2}(Cos\theta + iSin\theta)((Cos\alpha - iSin\alpha)$

$= \frac{r_1}{r_2}\ [\cos\theta\cos\alpha - i^2\ \sin\theta\sin\alpha\ ] + i[\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha]$

$= \frac{r_1}{r_2}\ [\cos(\theta-\alpha) + i\sin(\theta-\alpha)]$



$\left|\frac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_2}}\right| = \frac{r_1}{r_2}$

$\text{Arg}\left(\frac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_2}}\right) = \theta - \alpha$

குறிப்பு

1. $\left|\frac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_2}}\right| = \frac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_2}}$
2. $\text{Arg}\left(\frac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_2}}\right) = \text{Arg}(Z_1) - \text{Arg}(Z_2)$

$Arg(Z_1) = \theta$

$Arg(Z_2) = \alpha$

$|Z_1| = OA = r_1$

$|Z_2| = OB = r_2$

OM = 1 அலகு ஆகுமாறு மெய்யச்சில் M என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

OA உடன் வலஞ்சுழியாக α கோணத்தில் l என்ற கோட்டை வரைக

$\measuredangle OBM = \measuredangle OAC$ ஆகுமாறு l என்ற கோட்டில் C என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

$\measuredangle MOA = \theta$

$\measuredangle MOB = \alpha$

$\Delta\text{OMB}, \Delta\text{OCA}$ இயல்பொத்தவை

$\therefore\ \frac{OM}{OB} = \frac{OC}{OA} \Longrightarrow \frac{1}{r_2} = \frac{OC}{r_1}$

$\Longrightarrow\ OC = \frac{r_1}{r_2}$

ஸ்ரீ $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|$

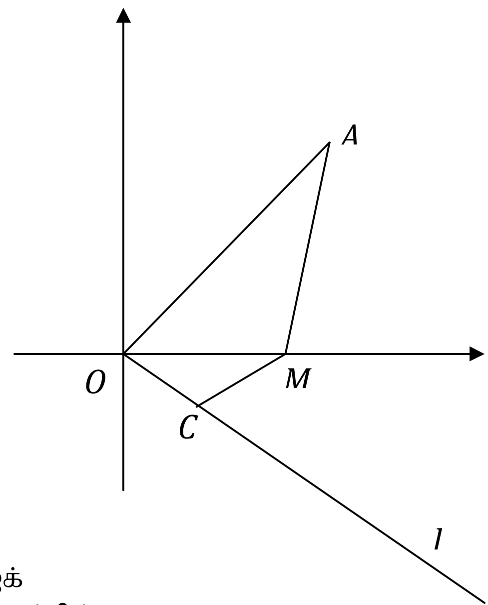
அத்துடன் $\measuredangle MOC = \theta - \alpha$

$$= \text{Arg}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)$$

ஆகவே புள்ளி C ஆனது $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)$ என்ற சிக்கலெண்ணைக்குறிக்கும்

அமைப்பு 6

Z தரப்படின் $\left(\frac{1}{Z}\right)$ ஐ அமைத்தல்



$Z = r(Cos\theta + iSin\theta)$

$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r(Cos\theta + iSin\theta)}$

$= \frac{1}{r}\,(Cos\theta - iSin\theta)$

$= \frac{1}{r}\,[Cos(-\theta) + iSin()]$

ஆகவே $\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{r}$

$= \frac{1}{|Z|}$

$\text{Arg}\left(\frac{1}{Z}\right) = (-\theta)$

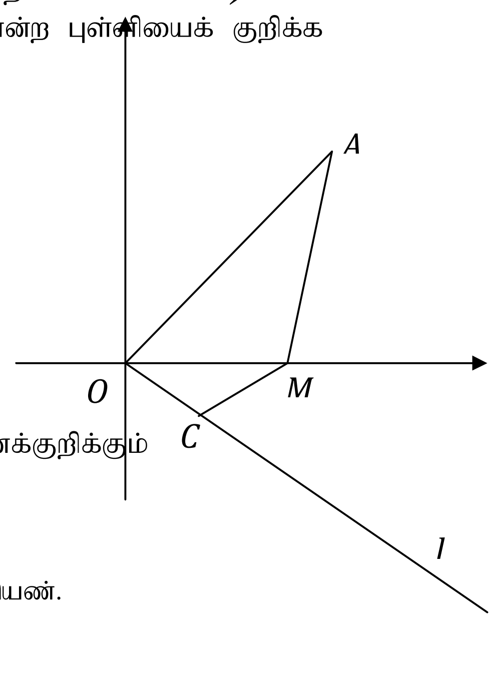
ஆகன் வரிப்படத்தில் A என்ற புள்ளி Z ஐக் குறிக்கும். OM = 1 அலகு ஆகுமாறு மெய்யச்சில் M ஐக்குறிக்க.

$\measuredangle MOA = \theta$

மெய்யச்சுடன் வலஞ்சுழியாக θ கோணத்தில் l என்ற கோட்டை வரைக.

$\measuredangle OAM = \measuredangle OMC$ ஆகுமாறு l என்ற கோட்டில் C என்ற புள்ளியைக் குறிக்க

ΔOMA, ΔOCM இயல்பொத்தவை



$\therefore \frac{OM}{OA} = \frac{OC}{OM} \Longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{OC}{1}$

$\Longrightarrow$ OC $= \frac{1}{r}$

$= \left|\frac{1}{Z}\right|$

$\measuredangle MOC = -\theta$

$= \text{Arg}\left(\frac{1}{Z}\right)$

ஆகவே C என்ற புள்ளி $\left(\frac{1}{Z}\right)$ என்ற சிக்கலெண்ணைக்குறிக்கும்

அமைப்பு 5

Z தரப்படின் (λZ) ஐ அமைத்தல் இங்கு λ ஒரு மெய்யெண்.

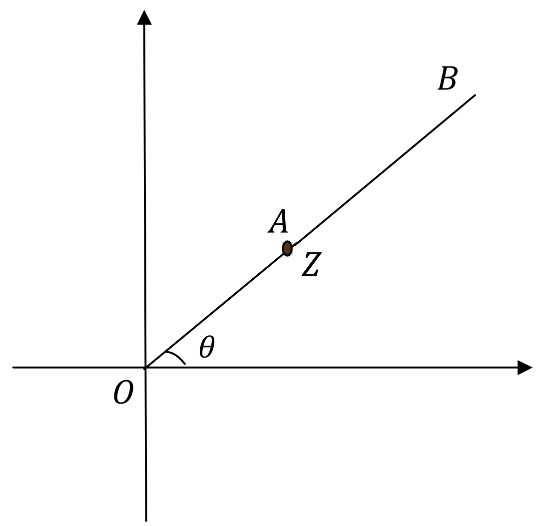
$Z = r(Cos\theta + iSin\theta)$
$\lambda Z = \lambda r(Cos\theta + iSin\theta)$

$\therefore |\lambda Z| = \lambda r$
$\quad\quad = \lambda |Z|$

அத்துடன் $Arg(\lambda Z) = \theta$
$\quad\quad\quad\quad = Arg(Z)$

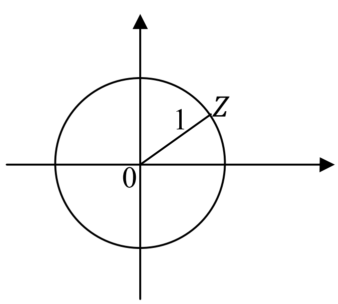
$OA = |Z|$
$OB = \lambda . OA$
$\quad = \lambda . |Z|$

ஆகவே B ஆனது λZ ஐக் குறிக்கும்

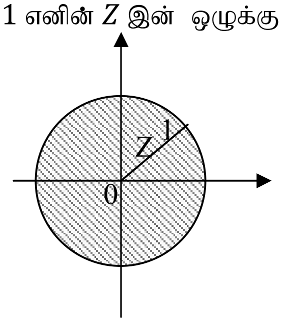


<u>ஒழுக்கு Loci</u>

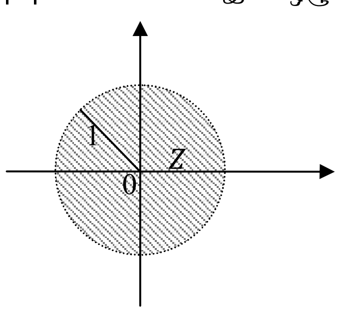
1. $|Z| = 1$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு



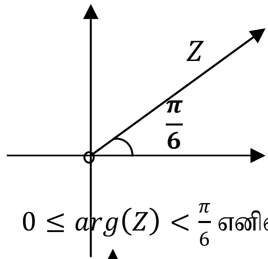
2. $|Z| \leq 1$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு



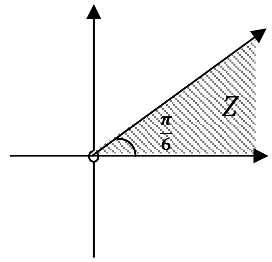
3. $|Z| < 1$ எனின்˙ Z இன் ஒழுக்கு



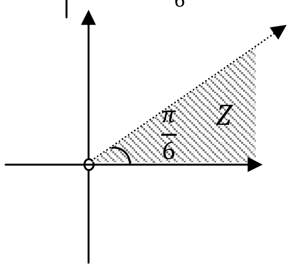
4. $arg(Z) = \frac{\pi}{6}$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு



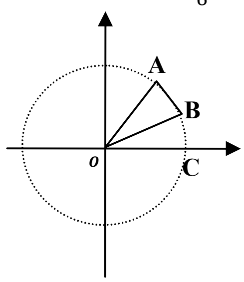
5. $0 \le arg(Z) \le \frac{\pi}{6}$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு



6. $0 \le arg(Z) < \frac{\pi}{6}$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு



7. $|Z| = 2$ ஆகவும் $\frac{\pi}{6} \le arg(Z) \le \frac{\pi}{3}$ ஆகவும் இருப்பின் Z இன் ஒழுக்கு.

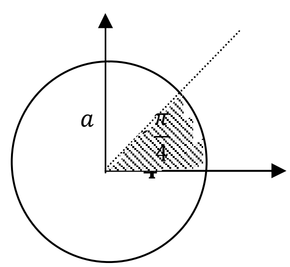


யு$\hat{O}C$ ஶீ $\frac{\pi}{3}$

டீ$\hat{O}C$ ஶீ $\frac{\pi}{6}$

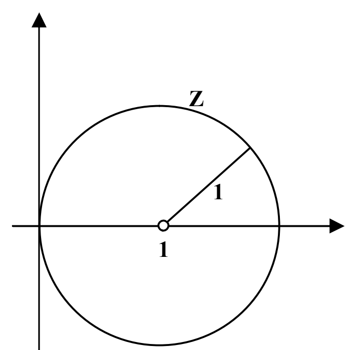
Z இன் ஒழுக்கு AB என்ற வில்.

8. $|Z| \le a$ and $0 \le arg(Z) < \frac{\pi}{4}$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு யாது?



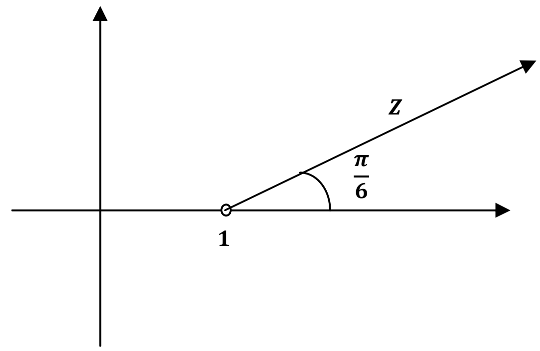
Z இன் ஒழுக்கு நிழற்படுத்தியபகுதி ஆகும்

9. $|Z-1| = 1$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு

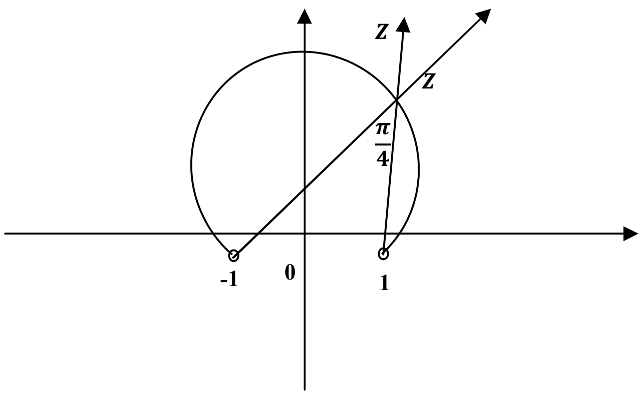


Z இன் ஒழுக்கு $(1,0)$ ஐ மையமாகவும் 1 அலகு ஆரையாகவும் உடைய வட்டமாகும்.

10. $arg(Z-1)=\frac{\pi}{6}$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு

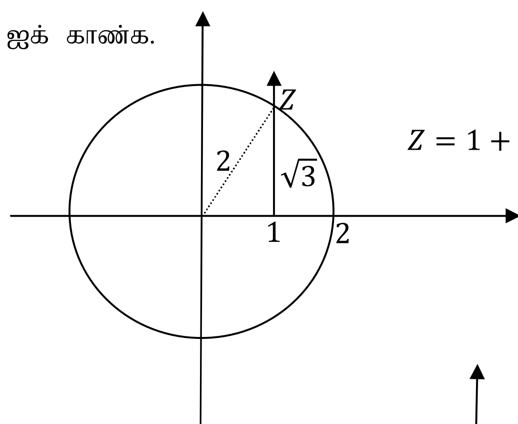


11. $arg(Z-1)-arg(z+1)=\frac{\pi}{4}$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு



Z இன் ஒழுக்கு வட்டவில் ஆகும்.

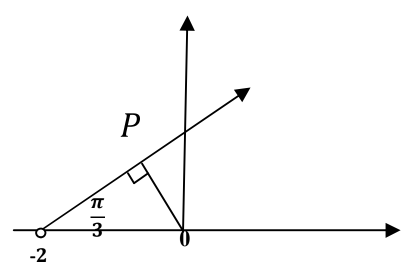
12. $|Z|=2 \quad and \ arg(Z-1)=\frac{\pi}{2}$ எனின் Z ஐக் காண்க.



$Z=1+\sqrt{3}i$

13.

$\arg(Z+2)=\dfrac{\pi}{3}$ எனின் $|Z|$இன் இழிவுப் பெறுமானம் யாது?



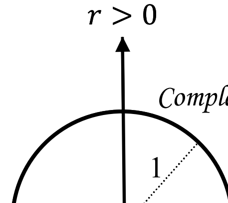
$|Z|_{min}=OP=2Sin\frac{\pi}{3}$

$=\sqrt{3}$

14. $Re\left(Z-\frac{1}{Z}\right)=0$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு யாது?

$Z=r(Cos\theta+i\,Sin\theta)$

$r>0$



$\bar{Z} = r(Cos\theta - i\ Sin\theta)$

$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r}(Cos\theta - i\ Sin\theta)$

$Re\left(Z - \frac{1}{Z}\right) = rCos\theta - \frac{1}{r}Cos\theta = 0$

$\Rightarrow Cos\theta\left(r - \frac{1}{r}\right) = 0$

$\Rightarrow Cos\theta\left(\frac{r^2-1}{r}\right) = 0$

$r \neq 0 \Rightarrow Cos\theta(r^2 - 1) = 0$

$Cos\theta = 0 \quad or \quad r = 1$

$\theta = \pm\frac{\pi}{2} \quad or \quad |Z| = 1$

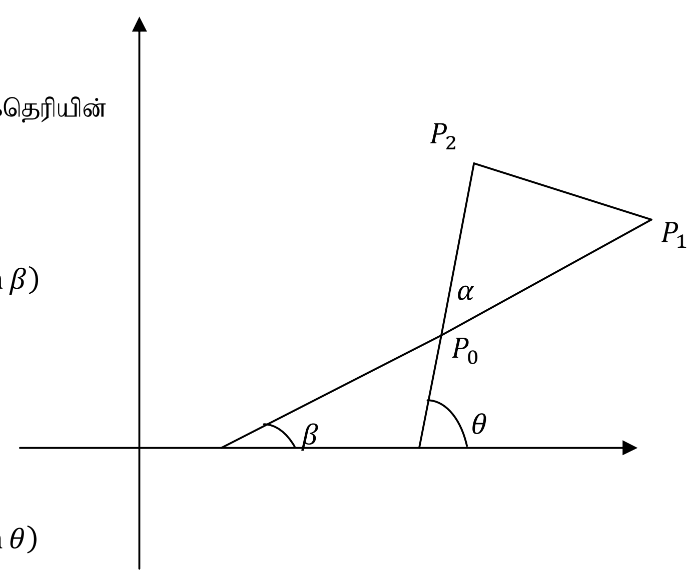
ஒழுக்கு வட்டம் அல்லது உற்பத்தி தவிர்ந்த கற்பனை அச்சாகும்

Some Important Results

- $z\bar{z} = |z|^2$
- $z\bar{z}$ மெய்யானது
- $z + \bar{z}$ மெய்யானது
- z மெய் எனின் $arg(Z) = 0\ or\ \pi\ and\ Im(Z) = 0$
- z கற்பனை எனின் $\arg(Z) = \pm\frac{\pi}{2}\ and\ \mathrm{Re}(Z) = 0$

தேற்றம் : Z_0, Z_1, Z_2 என்பன ஆகன் வரிப்படத்தில் முறையே P_0, P_1, P_2 ஆகிய புள்ளிகளை குறிக்கின்றன. $\measuredangle P_1\ P_0P_2 = \alpha$, P_0, P_1, P_2 என்பன இடஞ்சுழியாகவோ அன்றி வலஞ்சுழியாகவோ அமைவதற்கேற்ப $\frac{Z_2-Z_0}{Z_1-Z_0} = \frac{P_2P_0}{P_1P_0}\ (\cos\alpha \pm \sin\alpha)$ ஆகும்

நிறுவல்:



P_0, P_1, P_2 என்பன இடஞ்சுழியாகதெரியின்

$|Z_1 - Z_0| = P_1P_0$

$\text{Arg}\ (Z_1 - Z_0) = \beta$

$\therefore\ Z_1 - Z_0 = P_1P_0\ (\cos\beta + i\sin\beta)$

$|Z_2 - Z_0| = P_2P_0$

$\text{Arg}\ (Z_2 - Z_0) = \theta$

$\therefore\ Z_2 - Z_0 = P_2P_0\ (\cos\theta + i\sin\theta)$

எனவே $\frac{Z_2-Z_0}{Z_1-Z_0} = \frac{P_2P_0\ (\cos\theta+i\sin\theta)}{P_1P_0\ (\cos\beta+i\sin\beta)}$

$$= \frac{P_2P_0}{P_1P_0}([\cos(\theta-\beta)+i\sin(\theta-\beta)])$$

$$= \frac{P_2P_0}{P_1P_0}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

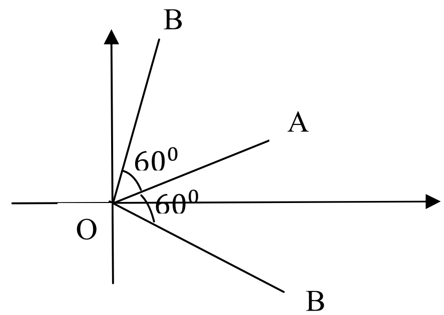
$P_0, P_1\ , P_2$ என்பன வலஞ்சுழியாக தெரியின்

$$\frac{Z_2-Z_0}{Z_1-Z_0} = \frac{P_2P_0}{P_1P_0}(\cos\alpha-i\sin\alpha)$$

$P_0, P_1\ , P_2$ என்பன இடஞ்சுழியாகவோ அன்றி வலஞ்சுழியாகவோ அமைவதற்கேற்ப $\frac{Z_2-Z_0}{Z_1-Z_0} = \frac{P_2P_0}{P_1P_0}\ (\cos\alpha \pm \sin\alpha)$ ஆகும்

உதாரணம்

OAB ஓர் சமபக்க முக்கோணி A என்ற புள்ளியை $1+\sqrt{3}i$ என்ற சிக்கலெண் குறிப்பின் B ஐக்குறிக்கும் சிக்கலெண்ணைக்காண்க



B ஐ Z என்ற சிக்கலெண் குறிக்குமென்க

$$\frac{Z-0}{1+\sqrt{3}i-0} = \frac{OB}{OA}\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$Z = \left(1+\sqrt{3}i\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ (OA=OB)

$$= \left(1+\sqrt{3}i\right)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= -1+\sqrt{3}i \text{ or } 2$$

பயிற்சி

1. $3 + i, -2 - 2i, -1 + 2i$ என்ற சிக்கலெண்ணைக்குறிக்கும் புள்ளிகள் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியைக்குறிக்கும் எனக் காட்டுக

பின்வரும் ஒழுக்குகளை ஆகன் வரிப் படத்தில் குறித்து விபரிக்க

1. $|Z| = 2$
2. $|Z| \leq 2$
3. $|Z| \langle 2$
4. $1 \leq |Z| \langle 2$
5. $|Z - 1| = 3$
6. $|Z + 1| = 2$
7. $|Z - i| = 1$
8. $|Z - 1 - 2i| = 1$
9. $|Z + 1 + i| = 1$
10. $|Z + 2 - i| = 2$
11. $|Z + 2 - i| = |Z - 3 + 2i|$
12. $\arg(Z) = \frac{\pi}{3}$
13. $\arg(Z - 1) = \frac{\pi}{6}$
14. $\arg(Z - i) = \pi$
15. $\arg(Z + i) = -\frac{\pi}{2}$
16. $\arg(Z - 2 + 3i) = \frac{2\pi}{3}$
17. $\arg(Z - 1) - \arg(Z + 1) = \frac{\pi}{2}$
18. $\mathrm{Re}\left(Z - \frac{1}{z}\right) = 0$

20. $\arg(Z - 4) - \arg(Z) = \frac{\pi}{3}$

21 $\arg(Z + 2) = \arg(Z - 2) - \frac{\pi}{6}$

22. $\arg(Z - i) + \frac{\pi}{4} = \arg(Z + i)$

23. $\mathrm{Im}(Z^2) = 0$

24 $\mathrm{Im}\left(Z - 1 + \frac{4}{z} \right) = 0$

25 $\mathrm{Re}\left(\frac{z-2}{z} \right) = 0$

26. $\mathrm{Re}\left(Z - \frac{1}{\bar{z}} \right) = 0$

27. $0 \langle \arg(Z + 2 + 3i) \leq \frac{\pi}{3}$

28. $\arg(Z+3) = \frac{\pi}{3}$ எனின் $|Z|$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க

29. $|Z - 3 + 3i| = 2$ எனின் $|Z+1|$ இன் உயர்வு இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க

30 $\left(\frac{5-i}{2-3i} \right)^6$ இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு கற்பனையானது எனக் காட்டுக

31. $\frac{(-1+i)^3}{(1+i)^4}$ இன் மட்டு வீச்சம் என்பவற்றைக் காண்க

$Z_1 = \frac{1+i}{1-i}$ $Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$ Z_1, Z_2 ஐ ஆகன் வரிப்படத்தில் குறித்து $Z_1 + Z_2$ ஐ அமைக்க

$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2-1}$ என உய்த்தறிக

32. $Z_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$ $Z_2 = i$ ஆக உள்ள சிக்கல்லெண்ணின் மட்டையும் வீசலையும் தணிக, சிக்கலெண்ண் Z_1, Z_2, Z_1+Z_2 என்பவற்றை ஆகன் வரிப்படத்தில் குறிக்க. இதிலிருந்து $\tan\left(\frac{5\pi}{12} \right)$ இன் பெறுமானத்தை துணிக.

33 . பின்வருவனவற்றால் தரப்படும் பிரதேசத்தை நிழற்றுக

1. $|Z| \langle 5, \quad -\frac{\pi}{6} \langle \ \arg(Z) \ \langle \frac{\pi}{6}$
2. $\frac{\pi}{3} \leq \ \arg(Z) \ \langle \frac{2\pi}{3}$

34. பின்வருவனவற்றில் Z ஐக் காண்க

1. $|Z| = 4 \, and \arg(Z) = \frac{\pi}{4}$
2. $|Z+2+i| = 5 and \ \operatorname{Re}(Z-1) = 0$
3. $|Z-1+2i| = |Z+1| \ and \ |Z-1| = \sqrt{2}$
4. $\arg(Z) = -\frac{\pi}{4} \ and |Z| = 2$
5. $\arg(Z+1) = \frac{\pi}{6} \ and \ \arg(Z-1) = \frac{2\pi}{6}$

35. பின்வருவனவற்றில் Z ஐக் குறித்துக் காட்டுக.

1. $0 \le \arg(Z+1) \le \frac{\pi}{3} \quad and \quad |Z+i| = 3$
2. $|Z+3-2i| \le 4 \quad and \quad \arg(Z+1) = \frac{5\pi}{6}$
3. $|Z| \rangle 1, \ |Z| \langle 4 \quad and \quad \arg(Z) = -\frac{3\pi}{4}$

36. α, ω என்பன இரு சிக்கலெண்களாயின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

1) $\alpha\overline{\omega} + \overline{\alpha}\omega = 2\operatorname{Re}(\alpha\overline{\omega})$
2) $(\alpha+\omega)(\overline{\alpha+\omega}) = \alpha\overline{\alpha} + \omega\overline{\omega} + 2\operatorname{Re}(\alpha\overline{\omega})$
3) $2|Re(\alpha)||Im\,\alpha| \le |\alpha|^2$
4) $|\alpha| \le |Re\,\alpha| + |Im\,\alpha| \le \sqrt{2}|\alpha|$
5) $|\alpha+\omega| \le |\alpha| + |\omega|$

37. $\arg(Z_1 - Z_2) - \arg(Z_1 + Z_2) = \frac{\pi}{2}$,எனின் $|Z_1| = |Z_2|$ எனக் காட்டுக

38. $|Z_1 - Z_2| = |Z_1 + Z_2|$ எனின் $\arg Z_1 - \arg Z_2 = \frac{\pi}{2}$ எனக் காட்டுக

39. $|Z_1 - Z_2| = |Z_1 + Z_2|$,எனின் $\frac{iZ_1}{Z_2}$ எனக் காட்டுக

40. ஒருசமபக்கமுக்கோணியின் உச்சிகள் Z_1, Z_2, Z_3 ஆலும் மையப்போலி Z_0 ஆலும் குறிக்கப்படின்

1) $\frac{1}{Z_1 - Z_2} + \frac{1}{Z_2 - Z_3} + \frac{1}{Z_3 - Z_1} = 0$ என நிறுவுக.
2) $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 3Z_0^2$ என நிறுவுக

41. $|Z_1 - Z_2|^2 + |Z_1 - Z_2|^2 = 2|Z_1|^2 + 2|Z_2|^2$ என நிறுவுக

42. $|Z-1| = 1$ எனின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக

1) $\arg(Z-1) = 2\arg(Z)$

2) $\arg\left(\frac{Z-2}{Z}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$

3) $\frac{Z-2}{2} = i\tan(\arg(Z))$

43 (a) புள்ளி P ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கல் எண் z ஐக் குறிக்கின்றது. சிக்கல் எண் Z^2 ஐ புள்ளி Q குறிப்பின், Q ஐ கேத்திர கணித முறையால் விபரிக்க. (கணிப்புக்கள் அவசியமில்லை)

1. P ஆனது (1,0) ஐ மையமாகவும் 1 ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தில் கிடக்கின்றது. எனின்,

(i) $|Z^2 - Z| = |Z|$ எனவும்

(ii) $Arg(Z-1) = Arg(Z^2) = \frac{2}{3}Arg(Z^2 - Z)$ எனவும் காட்டுக.

45. $Arg\left(\frac{Z+i}{Z-1}\right) = \pi/4$ ஆகுமாறு Z இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

46. $|Z| < 5$, உம் $-\pi/6 < ArgZ < \pi/6$ உம் ஆகுமாறுள்ள பிரதேசத்தை ஆகன் வரிப்படத்தில் நிழற்றிக் காட்டுக.

47. Z_1, Z_2 என்பன எவையேனும் இரு சிக்கலெண்களெனக் கொள்வோம். ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் $Z_1 + Z_2$ ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளியை அமைக்க.

$|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$ ஆக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தை எடுத்துக் காட்டும் வரிப்படத்தை வரைக.

பொதுவாக $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ ஆக இருப்பது ஏனெனக் கேத்திரகணித முறையில் விளக்குக.

$Z_1 = -12 + 5i$ ஆகவும் $|Z_2| = 5$ ஆகவும் இருப்பின், $|Z_1 + Z_2|$ இன் மிகப் பெரிய பெறுமானத்ததைக் காண்க.

$|Z_1 + Z_2|$ அதன் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தைக் கொண்டும் $\frac{\pi}{2} < \arg\ z_2 < \pi$

ஆகவும் இருப்பின், Z_2 ஐ $p+iq$ வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க.

48. ஆகன் வரிப்படத்தில் A, B, C, D என்னும் புள்ளிகள் முறையே z_1, z_2, z_3, z_4 என்னும் சிக்கலெண்களை வகைகுறிக்கின்றன.

AB யும் CD யும் செங்குத்தாக இடைவெட்டுமெனின், அப்போது $\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right)$ அறக் கற்பனையானதெனக் காட்டுக.

49. z என்பது சிக்கலெண் $\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$ எனக் கொள்வோம்.

$2z^2, \frac{3}{z^2}$ என்னும் சிக்கலெண்கள் ஒவ்வொன்றினதும் மட்டினையும் வீசலையும் காண்க.

ஓர் ஆகன் விரிப்படத்திலே O ஆனது உற்பத்தியையும் A ஆனது சிக்கலெண் $2z^2$ ஐயும் B ஆனது சிக்கலெண் $\frac{3}{z^2}$ ஐயும் வகைகுறிக்கின்றன.

O விற்கும் B யிற்கும் ஊடாகச் செல்லும் கோட்டின் மீது z ஐ வகைகுறிக்கம் புள்ளி கிடக்கின்றதா?

OACB ஓர் இணைகரமாக இருக்குமாறு புள்ளி C தெரிந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளது. C யினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கலெண் p + iq வைத் தெக்காட்டின் வடிவத்தில் துணிக.

OACB யின் மூலைவிட்டங்களின் நீளங்களைக் காண்க.

50. சிக்கலெண் $w = \sqrt{3} + i$ ஐ $r(\cos 0 + i \sin 0)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க; இங்கே $r > 0$. அதோடு $0 \leq 0 < 2\pi$ ஆக இருக்குமாறு 0 ஆரையனில் உள்ளது.

w^2, w^3, w^4, w^5 ஆகியவற்றை மேற்குறித்த வடிவில் பெறுக. $6 < |z| < 30$ ஆகவும் $\frac{\pi}{6} < \arg\ z < \frac{5\pi}{6}$ ஆகவும் இருக்குமாறு சிக்கலெண்கள் z ஐ ஆகன் வரிப்படத்தில் வகைக்குறிக்கம் புள்ளிகளைக் கொண்ட பிரதேசம் R இல் கிடக்கின்றனவற்றைத் துணிக.

சிக்கலெண் $w^n (n = 1, 2, \ldots\ldots, 5)$ ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளிடையே எவை பிரதேசம் R இல் கிடக்கின்றனவெனத் துணிக.

51. சிக்கலெண் z ஆனது $z = x + iy,\ \ y > 0$ இனால் தரப்படுகின்றது. ஆகன் வரிப்படத்தில் z, 2iz, z + 2iz ஆகியவற்றை நேரொத்த புள்ளிகள் முறையே A, B, C ஆகிய புள்ளிகளைக் குறித்து, $A\hat{O}B$, tan $A\hat{O}C$ ஆகியவற்றைத் துணிக.

a. C ஆனது கற்பனையச்சின் மீது கிடந்தால், x இற்கும் y யிற்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமையைப் பெறுக.

b. y = 2x எனின் சிக்கலெண் z^2 ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளியானது கோடு OC மீது கிடக்கின்றதெனக் காட்டுக.

c. $|Z| \leq 4$ஆகவும் $\tan^{-1}\frac{1}{2} \leq \arg(Z) \leq \tan^{-1}2$ஆகவும் இருக்கும் சிக்கலெண் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளைக் கொண்ட பிரதேசத்தை வேறொரு வரிப்படத்தில் நிழற்றுக.

நிழற்றிய பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

52. (a) $\arg(z-a)=\alpha$ எனின் z இன் ஒழுக்கை விவரிக்க் இங்கு $a \in \Re$ உம் $0<\alpha<\pi$ உம் ஆகும். $\arg(z+1)=\frac{\pi}{6}$ எனவும் $\arg(z-1)=\frac{2\pi}{3}$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது.

(b) சிக்கலெண் $\frac{5-i}{2-3i}$ ஐ $\lambda(1+i)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்கலாமெனக் காட்டுக. இங்கு λ மெய்யானது. λ பெறுமானத்தைக் கூறுக.

இதிலிருந்து $\left(\frac{5-i}{2-3i}\right)^6$ கற்பனையானதெனக் காட்டி அதன் பெறுமானத்தைத் துணிக

53.

$Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},\ Z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ என்னும் சிக்கலெண்கள் ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் முறையே A, B என்னும் புள்ளிகளினால் வகைக்குறிக்கப்படுகின்றன. $Arg\ Z_1, Arg\ Z_2$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

OACB என்பது ஆகண் வரிப்படத்தில் ஒரு சதுரமெனத் தரப்பட்டிருப்பின், C யினால் வகைக்குறிக்கப்படும் சிக்கலெண்ணின் மட்டையும் வீசலையும் காண்க. இங்கு O ஆனது உற்பத்தியாகும்.

54. (i) $\left|Z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| \leq 2$ என்னும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு $|Z-3|$இன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தையும் மிகப்பெரிய பெறுமானத்தையும் காண்க.

55. $Arg(Z-1) = \frac{\pi}{6}$ என்னும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு Z இன் மிகச் சிற்ய பெறுமானத்தைக் காண்க.

56. (a) $-1+\sqrt{3i}$, $\frac{1+i}{1-i}$ என்பவற்றின் மட்டு, வீசலைக் காண்க.

(b) $7+24i$ இன் வர்க்க மூலங்களை $a+ib$ என்ற வடிவில் காண்க.

(c) $|z+2-i| = \sqrt{5}, arg(z+2) = \pm\frac{\pi}{2}$ ஆகுமாறுள்ள z இன் ஒழுக்குகளை ஆகண் வரிப்படத்தில் குறித்து z இனால் தரப்படும் பொது சிக்கலெண்களை $a+ib$ என்ற வடிவில் தருக.

57. (a) $a\epsilon\ R^+$ எனின் $\left\{\frac{3-i}{a-1-3i} + \frac{3+i}{a-1+3i}\right\}$ ஆனது நேர்மெய் எனக் காட்டுக.

மேலும் $\left\{\frac{3-i}{1-i} + \frac{3+i}{1+i}\right\}$ ஆனது நேர்மெய் என உய்த்தறிக.

(b) ஆகண் வரிப்படத்தில் இருக்கும் P_1, P_2 என்னும் புள்ளிகள் முறையே Z_1, Z_2 ஐ வகை குறிப்பின் (Z_1, Z_2) ஐ வகை குறிக்கும் புள்ளி P ஐ பெறுவதற்காக கேத்திரகணித அமைப்பை நிறுவலுடன் தருக.

$Z_1 = \frac{1+i}{1-i}, Z_2 = \frac{2}{1-\sqrt{3}i}$ எனின் p_1, p_2, p ஆகிய புள்ளிகளை அகண் வரிப்படத்தில் குறிக்குக. இதிலிருந்து $tan\frac{\pi}{12} = \left(2-\sqrt{3}\right)$ என உய்த்தறிக. $tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 3.732$ எனவும் காட்டுக.

58. $\omega = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ எனின் $|\omega|, \arg(\omega)$ என்பவற்றைக் காண்க.

ஆகன் வரிப்படத்தில் இருக்கும் புள்ளி P ஆனது சிக்கல் எண் Z ஐ வகை குறிக்கின்றது. $Z\omega$ வகை குறிக்கும் புள்ளி Qவை பெறுவதற்கான கேத்திரகணித அமைப்பை நிறுவலுடன் தருக. இதிலிருந்து $Z\omega^2$ வகை குறிக்கும் புள்ளி Rஐ **உய்த்தறிக.** P,Q,R என்பன சம பக்க முக்கோணியின் உச்சிகள் எனக் காட்டுக. மேலும் இம் முக்கோணியின் பரப்பு $\frac{3\sqrt{3}}{4}|Z|^2$ எனவும் காட்டுக.

59. $z_1 = -12 + 5i$ MfTk; $|z_2| = 5$ MfTk; ,Ug;gpd;> $|z_1 + z_2|$,d; kpfg;nghpa ngWkhdj;ijf; fhz;f.

$|z_1 + z_2|$ mjd; kpfg;nghpa ngWkhdj;ijf; nfhz;Lk; $\frac{\pi}{2} < \arg z_2 < \pi$ MfTk; ,Ug;gpd; z_2 I $p + iq$ tbtj;jpy; vLj;Jiuf;f.

60. $\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos(\theta - \alpha) + \sin(\theta - \alpha)$ எனக் காட்டுக

$Z = -1 + i$, $\omega = 1 + \sqrt{3}i$ எனின் $\frac{Z}{\omega}$ ஐக் காண்க

Z , ω என்பவற்றின் மட்டு வீசல் என்பவற்றைக் காண்க

$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$ எனக் காட்டுக

61. $0 \le Im(Z) < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|Z - 2| \le 1$ ஆகுமாறு ஆகன் வரிப்படத்தில் Z ஐக்குறிக்கும் பிரதேசத்தைக் காண்க

$Arg(Z)$ உயர்வாகும் போது Z ஐக் காண்க

62. $|Z + a| = |Z - a|$ ஆகுமாறு சிக்கலெண் Z இன் ஒழுக்கைக் காண்க a மெய்யெண்.

$|Z_1 + 2Z_2| = |Z_1 - 2Z_2|$ ஆகுமாறு இரு சிக்கலெண் எனின் $\frac{iZ_1}{Z_2}$ மெய்யானது எனக் காட்டுக

$Arg(Z_1) \sim Arg(Z_2) = \frac{\pi}{2}$ எனக்காட்டுக

$Z_1 + 2Z_2 , Z_1 - 2Z_2$ என்பவற்றை A , B என்ற புள்ளிகள் குறிப்பின் OA,OB செங்குத்தன்று எனின் $A\hat{O}B = \tan^{-1}\left[\frac{4k}{k^2-4}\right]$ எனக் காட்டுக

OA ⊥ OB எனின் k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க

63. Z_1, Z_2 என்பன A, B, என்ற புள்ளிகளைக்குறிக்கின்றன. $A\,\widehat{O}\,B = \frac{\pi}{4}$ எனின் ${Z_1}^2 + {Z_2}^2 = 0$ எனக் காட்டுக

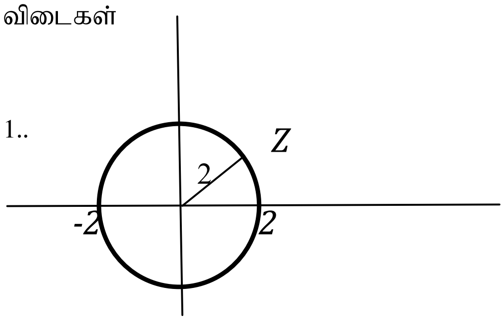
64. Z என்ற சிக்கலெண் A என்ற புள்ளியைக்குறிக்கும் B ஆனது iZ , Cஆனது Z+iZ ஐயும்குறிப்பின் OC = $\sqrt{2}\,|Z|$ எனவும் $|Z + iZ| = |Z - iZ|$ எனவும் காட்டுக.

65. .$|Z - i| < \frac{1}{2}$ எனின் $\frac{1}{2} < |Z| < \frac{3}{2}$ எனக் காட்டுக

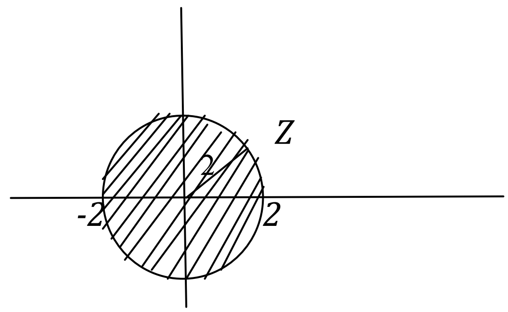
66. $|Z - i| < \frac{1}{2}$ ஆகவும் $\frac{\pi}{2} < |Z| < \frac{2\pi}{3}$ ஆகவும் உள்ள பிரதேசத்தை நிழற்றுக

விடைகள்

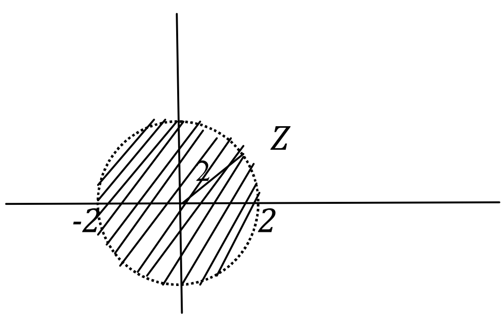
1..



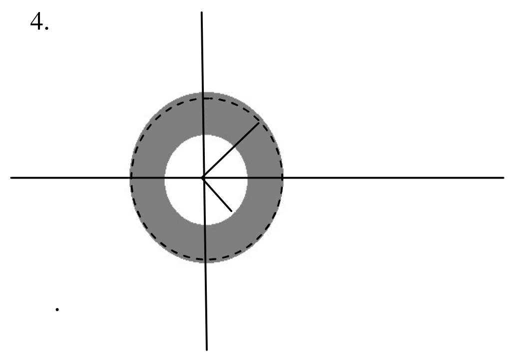
2.



3.

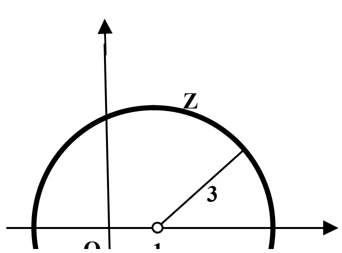


4.

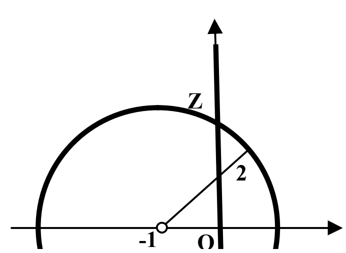


.

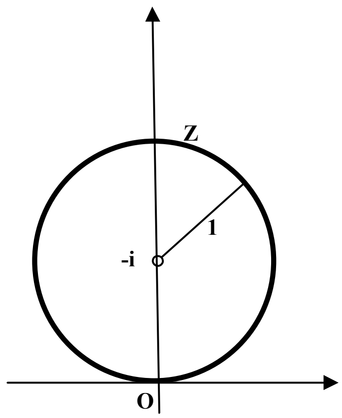
5.



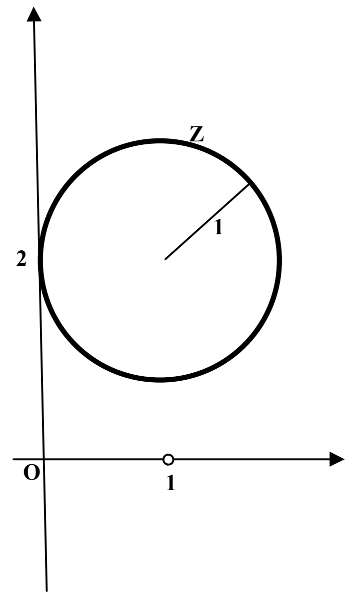
6.



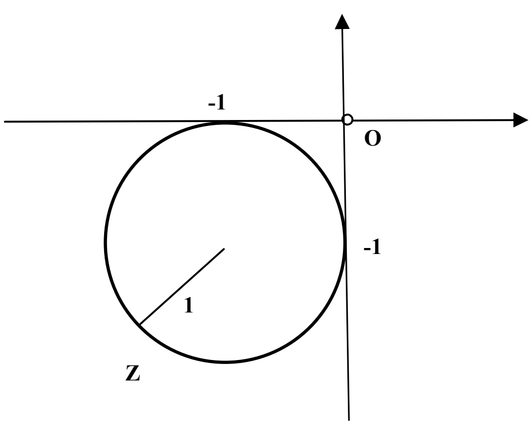
7.



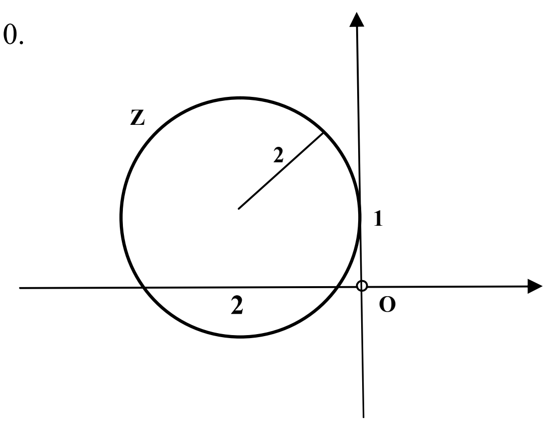
8.



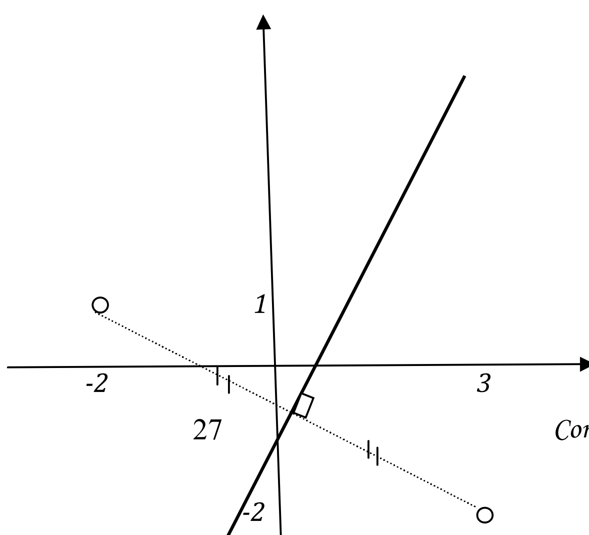
9.



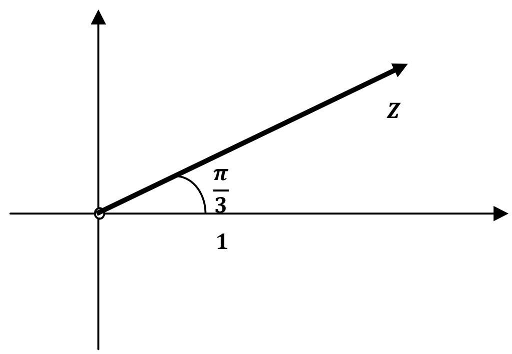
10.



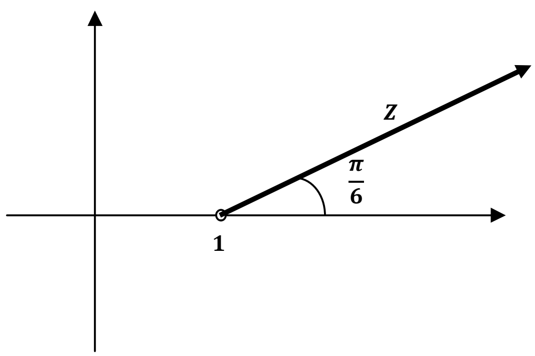
11.



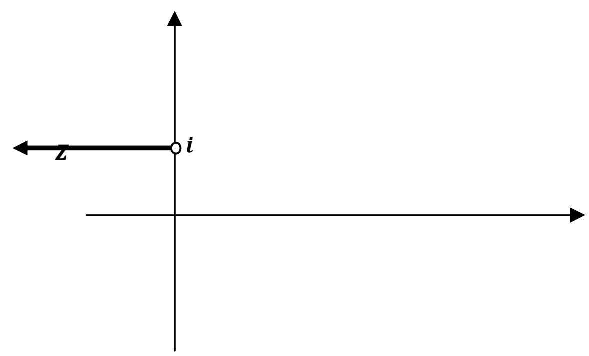
12.



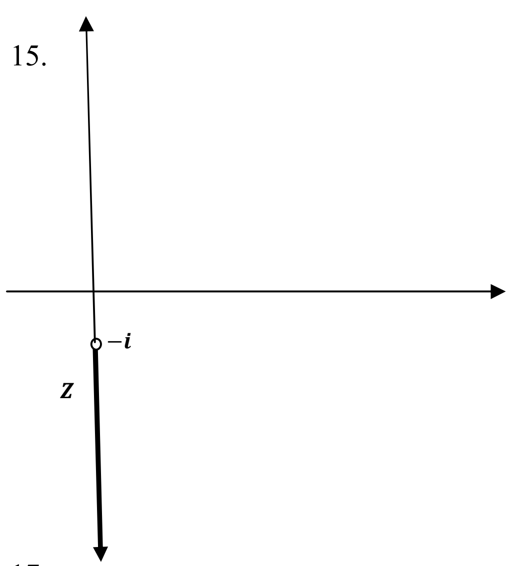
13.



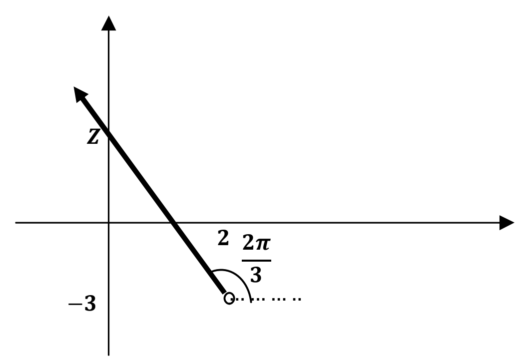
14.



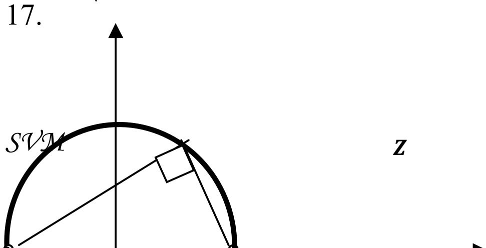
15.



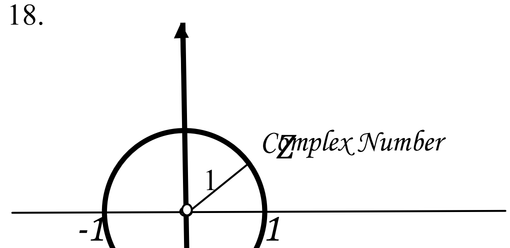
16.



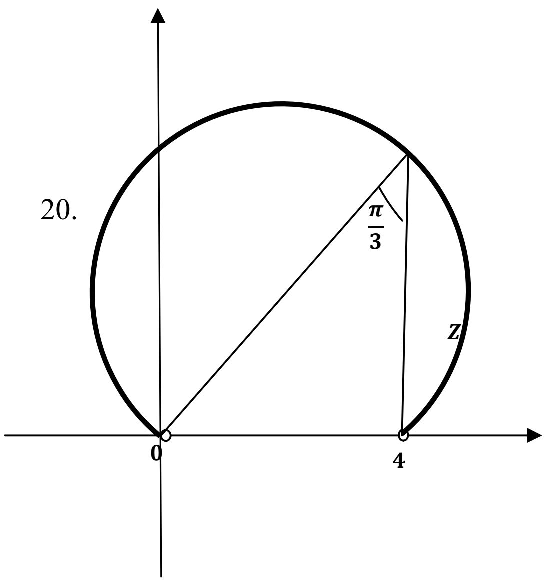
17.



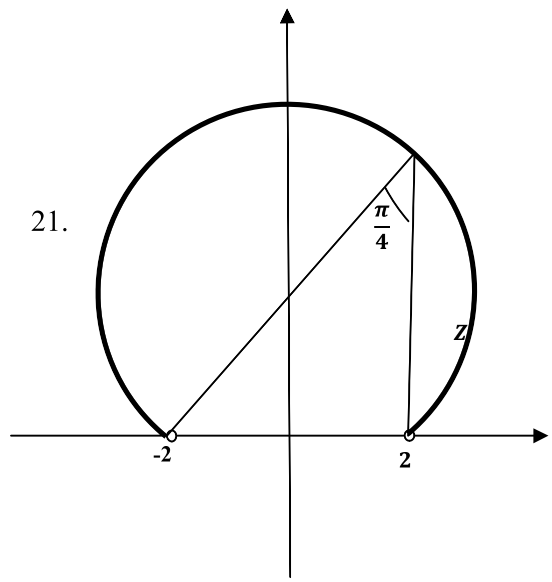
18.



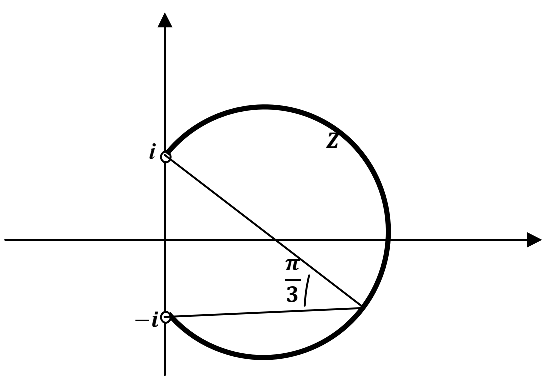
20.



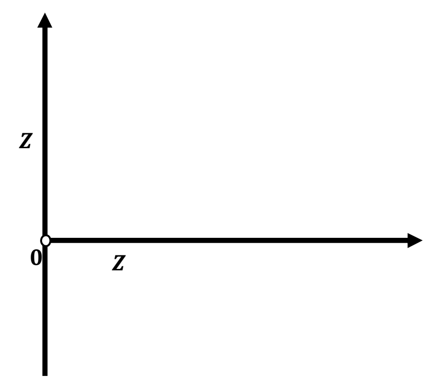
21.



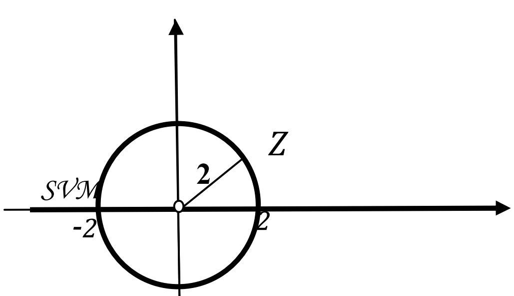
22.



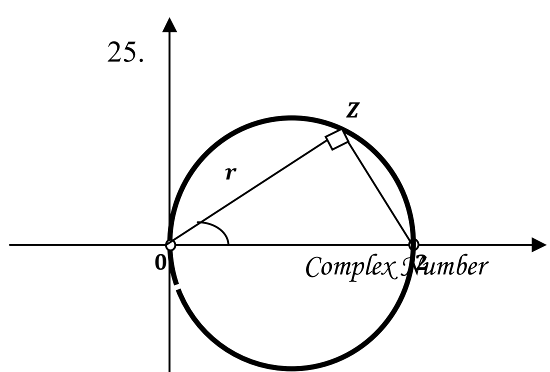
23.



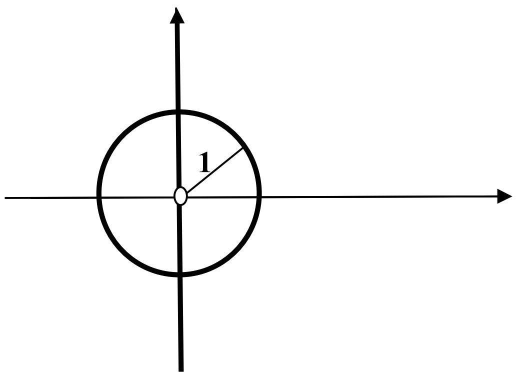
24.



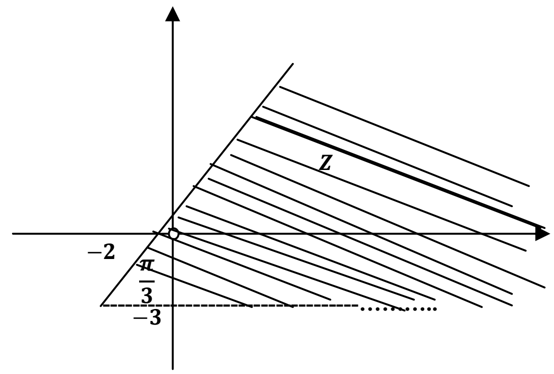
25.



26.



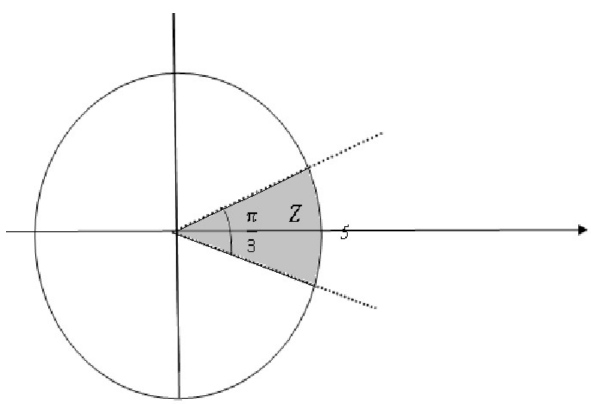
27.



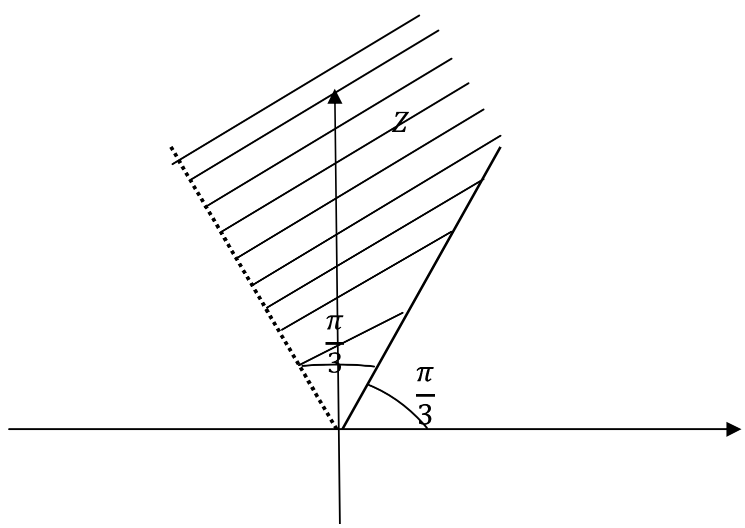
28 . $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 29. 7 ,3 30. -8i 31. 1 , $\frac{-2\pi}{3}$ 32. 1 , $\frac{\pi}{3}$

33

i.



ii.

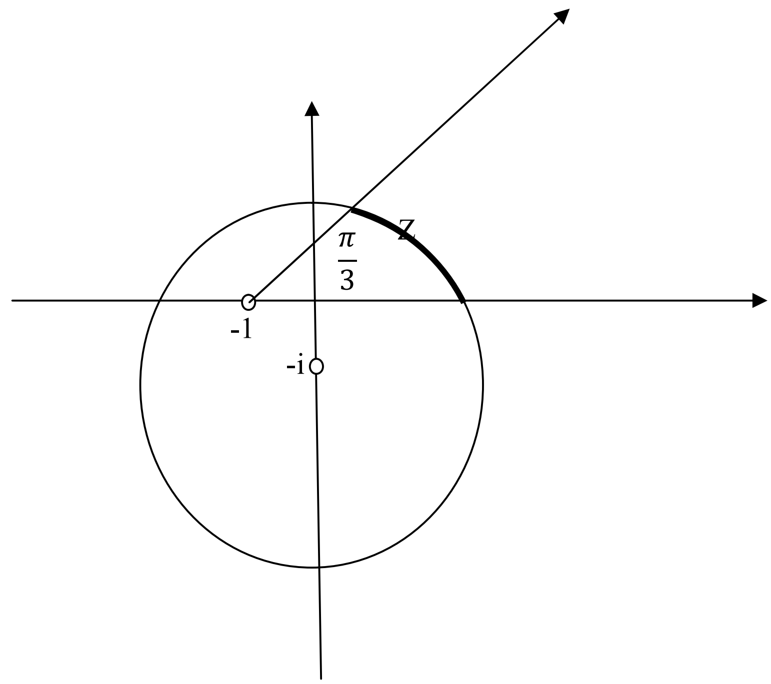


34.

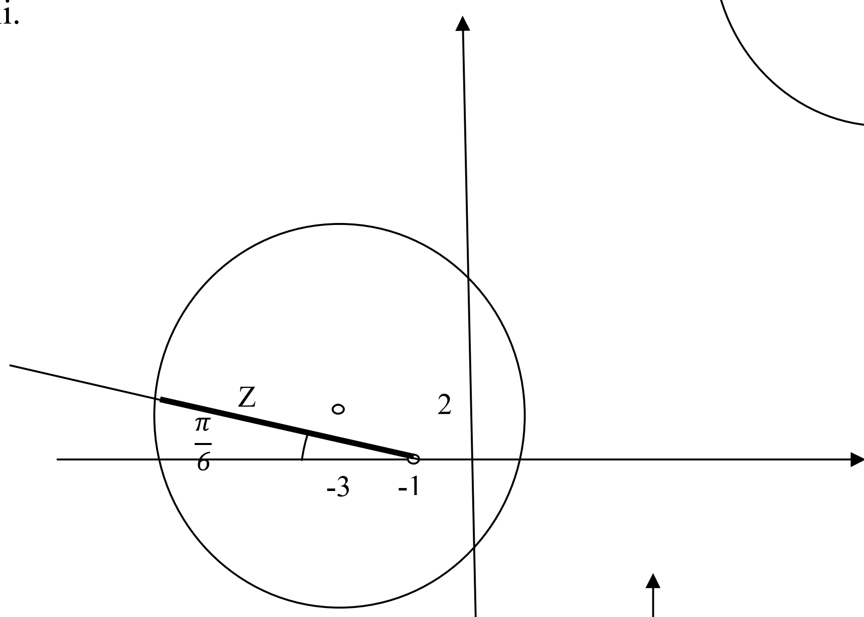
1. Z = $2\sqrt{2}(1+i)$
2. Z = 1+3i , 1-3i
3. *Z= -i , 2+i*
4. *Z =*$\sqrt{2}(1-i)$
5. *Z =*$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right)$

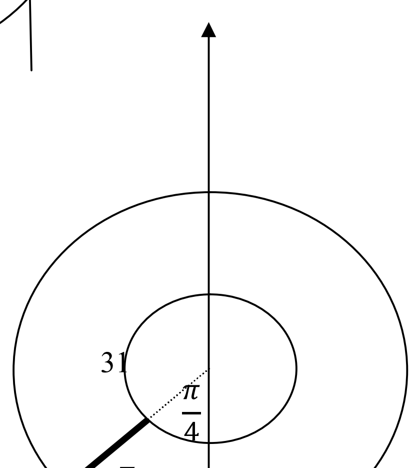
35

i



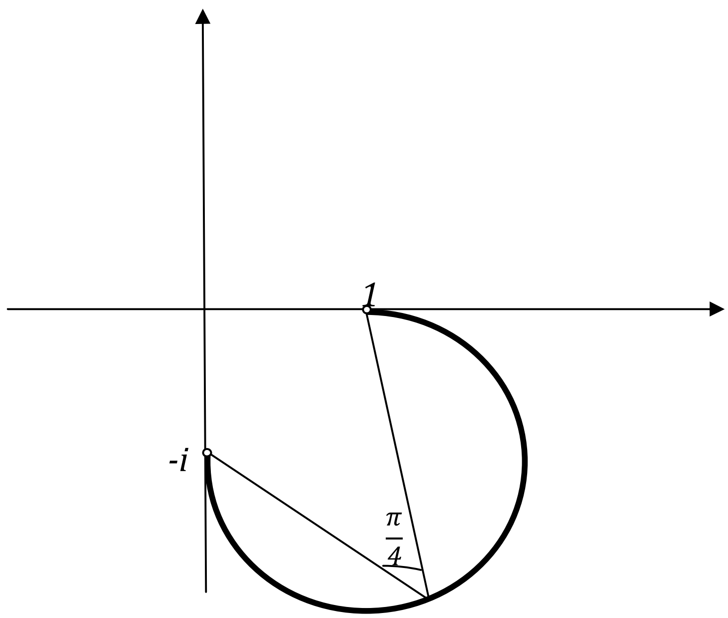
ii.





iii.

45.



46. $|Z_1 + Z_2|_{max} = 18$, $Z_2 = -\frac{60}{13} + \frac{25}{13}i$

49. $|2Z^2| = 2$, $\left|\frac{3}{Z^2}\right| = 3$, $Arg(2Z^2) = \frac{2\pi}{3}$, $Arg(3/Z^2) = -\frac{2\pi}{3}$

ஆம். $-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ மூலை விட்டங்கள் $\sqrt{7}$, $\sqrt{19}$

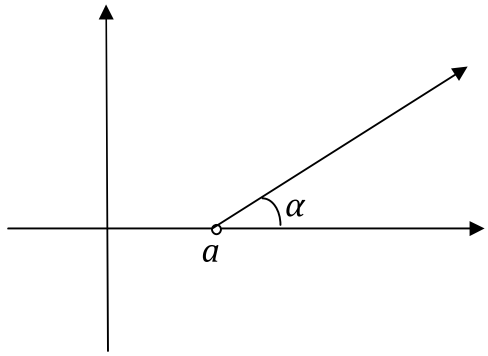
50. $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $w^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $w^3 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

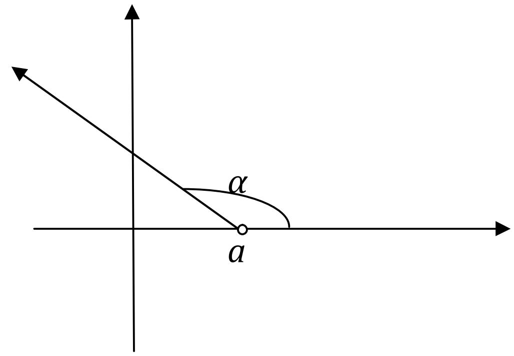
$w^4 = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $w^5 = 32\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

R இலுள்ளவை w^3 , w^4

51. $A\,\widehat{O}\,B = \frac{\pi}{2}$, $\tan A\,\widehat{O}\,C = 2$, a) x=2y c) R = $8\tan^{-1}\frac{3}{4}$

52.





Z = . $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad ,\lambda = 1\,,$ $\quad -8i$ கற்பனையானது

53.

$Arg(Z_1) = \frac{\pi}{6} \quad ,Arg(Z_2) = \frac{2\pi}{3}$

C இனால் குறிக்கப்படும் சிக்கலெண் $Z_1 + Z_2$ இன் மட்டு $\sqrt{2}$ ஆகும்.

$Arg(Z_1 + Z_2\,) = \frac{5\pi}{12}$

54. $|Z-3|_{min} = \sqrt{3} - 2 \quad ,|Z-3|_{max} = \sqrt{7}+2$

55. $|Z|_{min} = 1$

56. a. $Z = -1+\sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow |Z| = 2 \quad ,Arg(Z) = \frac{2\pi}{3}$

Z= $\frac{1+i}{1-i} = i \Rightarrow |Z| = 1 \quad ,Arg(Z) = \frac{\pi}{2}$

b. $4+3i \quad ,4-3i$

c.

Z_1 = -2+$(\sqrt{5}+1)$

Z_1 = -2-$(\sqrt{5}-1)$